Задание № 14 Формула Тейлора и ряд Тейлора

*Задание может быть выполнено либо в формате документа Word, либо в виде фотографии выполненного на бумаге решения.*

26.4 Формула Тейлора

М26.4.2 Теорема (о порядке приближения функции многочленом) Пусть  - произвольная функция, имеющая в точке  производные , и пусть , тогда



М26.4.3 *Замечание.*  Из доказанной теоремы следует, что формулу Тейлора можно использовать для вычислений приближенных значений дифференцируемых функций: , причем, чем больше число , тем приближение лучше. Данная приближенная формула называется *формулой Тейлора*. При  ее также называют *формулой Маклорена*.

26.5 Ряд Тейлора

Пусть функция  имеет на промежутке  производные любых порядков. Тогда, в связи с тем, что формула Тейлора при увеличении степени все лучше и лучше приближает функцию, естественно считать, что 

М26.5.1 Определение. Степенной ряд называется *рядом Тейлора* функции . При  этот ряд называют также *рядом Маклорена*. Функцию  называют *остатком ряда Тейлора*.

М26.5.2 Пример 1. Найдем ряды Маклорена функций , , , , .

*Решение:* 1) : , .



Интервал сходимости степенного ряда  равен  (М14.3.5).

2) :  и т. д.  т.е. последовательность значений производных в точке 0 выглядит так: 0,1,0,-1,0,10,-1,0,1,0,-1 и т.д.



Можно показать, что промежутком сходимости этого ряда также будет вся числовая прямая 

3) :  и т.д.

 т.е. последовательность значений производных в точке 0 выглядит так:

1,0,-1,0,10,-1,0,1,0,-1,0 и т.д.



И здесь можно показать, что промежутком сходимости этого ряда также будет вся числовая прямая .

4) : , , , , . Очевидно, что  и . Значит, .

Интервалом сходимости этого ряда является  (М14.3.4).

5) : , ,  и т.д.

 и т.д.



В частности, ,

Можно показать, что промежутком сходимости этого ряда является .

М26.5.6 Пример 2. составить ряды Маклорена функций , .

*Решение:* 1) : обозначим , тогда 

2) : обозначим , тогда 

М26.5.7 *Замечание.* Этот метод, называемый *метод подстановки* не всегда приводит к нужному результату. Например, при нахождении ряда Маклорена функции  этот метод не дал бы степенного ряда.

М26.5.8 Остаток ряда Тейлора в форме  не дает возможности вычислять значения функции с заданной точностью, поэтому часто используются другие формы остатка, удобные для приближенных вычислений.

В частности,  - *остаток в форме Лагранжа.*

**Самостоятельная работа:**

21.7.1. Способом непосредственного дифференцирования составить формулу Маклорена для функций: а) при ; б)  при ; в)  при ;

21.7.4. Составить ряды Маклорена функций, используя табличный ряд Маклорена функции : а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ; ж) ;

21.7.5. Составить ряды Маклорена функций, используя табличный ряд Маклорена функции : а) ; б) ; в) ; г) ;

21.7.6. Составить ряды Маклорена функций, используя табличные ряды Маклорена функций  и : а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ;

21.7.10. Составить ряды Тейлора заданных функций в заданных точках: а) ; б) ; в) ; г) ;д) ;

**Ответы:**

**21.7.1.** а) ; б) ; в) ;

**21.7.4.** а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ; ж) ;

**21.7.5.** а) ; б) ; в) ; г) ;

**21.7.6.** а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ;

**21.7.10.** а) ; б) ; в) ; г) ; д) ;

;